Polynômes de Tchebychev

Pafnoutïi Lvovitch Tchebychev, mathématicien russe , est né à Borovsk en 1821 et mort à Saint-Pétersbourg en 1894.

1) Définition et existence

a) Polynômes de Tchebychev de 1ère espèce : T_n.

Soit n un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Unicité. T_n est déterminé sur $[-1, 1]$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Existence. Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\right)\\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p}(\sin\theta)^{2p} = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(1-\cos^2\theta)^p\end{aligned}$$

et le polynôme $\displaystyle\sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p$ convient.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

b) Polynômes de Tchebychev de 2ème espèce : U_n.

Soit n un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme noté U_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$

Unicité. U_n est déterminé sur $]-1, 1[$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Existence. Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= \mathrm{Im}(e^{in\theta}) = \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\right)\\ &= \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1}(\cos\theta)^{n-(2p+1)}(\sin\theta)^{2p+1} = \sin\theta \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1}(\cos\theta)^{n-2p-1}(1-\cos^2\theta)^p\end{aligned}$$

et le polynôme $\displaystyle\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1}(1-X^2)^p$ convient.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1}(1-X^2)^p.$$

2) Relation entre T_n et U_n

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel θ, on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. En dérivant cette relation, pour tout réel θ on obtient

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta\left(\frac{1}{n}T_n\right)'(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$

Par unicité de U_n, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \frac{1}{n}T_n'.$$

3) Relation de récurrence

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, on a

$$\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta),$$

ce qui fournit encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta).$$

ou enfin

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

Ainsi, les polynômes $T_n + T_{n+2}$ et $2XT_{n+1}$ coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0.$$

4) Premières expressions de T_n et U_n

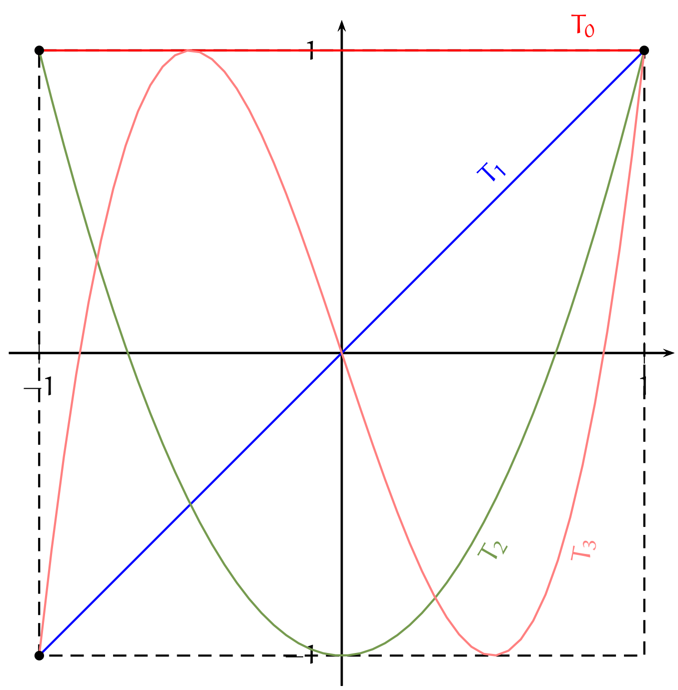
A partir de la relation de récurrence ou à partir de l'expression de T_n du 1)a) ou encore en calculant directement $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$, ..., on obtient :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1,\ T_3 = 4X^3 - 3X,\ T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \text{ et } T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

De même, à partir de l'égalité $U_n = \frac{1}{n}T_n'$, on obtient

$$U_1 = 1,\ U_2 = 2X,\ U_3 = 4X^2 - 1,\ U_4 = 8X^3 - 6X \text{ et } U_5 = 16X^4 - 12X^2 + 1.$$

5) Graphes des premiers T_n



6) Degré, coefficient dominant

1 ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que

$$T_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

Puisque pour tout entier naturel $p \in [\![0, E(\frac{n}{2})]\!]$, on a $n-2p+2p=n$, T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. De plus, le coefficient de X^n dans T_n vaut

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots &= \frac{1}{2}((C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots) + (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots)) = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) \\ &= \frac{1}{2}(2^n + 0) \ ((1-1)^n = 0 \text{ car } n \geq 1) \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

2 ème solution. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- On a déjà $\deg(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, $\text{dom}(T_1) = 1 = 2^{1-1}$ et $\text{dom}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(T_n) = n$, $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ et $\text{dom}(T_{n+1}) = 2^n$ alors

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2,$$

et

$$\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2XT_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$T_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \deg(T_n) = n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \text{dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$

Par dérivation , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \deg(U_n) = n - 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \text{dom}(U_n) = 2^{n-1}.$$

7) Parité

Pour tout naturel n, T_n a la parité de n. En effet,

$$T_n(-X) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (-X)^{n-2p}(1-(-X)^2)^p = (-1)^n \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p = (-1)^n T_n.$$

On peut aussi écrire pour tout réel θ :

$$T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n\theta + n\pi) = (-1)^n \cos(n\theta) = (-1)^n T_n(\cos\theta),$$

et donc, pour tout réel x de $[-1, 1]$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Puisque $[-1, 1]$ est infini, les polynômes $T_n(-X)$ et $(-1)^n T_n$ sont égaux.

On peut encore utiliser la relation de récurrence du 3).
Tout d'abord, $T_0(-X) = (-1)^0 T_0$ et $T_1(-X) = (-1)^1 T_1$.
Ensuite, si pour $n \geq 0$ $T_n(-X) = (-1)^n T_n$ et $T_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}$ alors

$$T_{n+2}(-X) = 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-1)^{n+2} X T_{n+1} - (-1)^n T_n = (-1)^{n+2}(2XT_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2} T_{n+2}.$$

Pour tout naturel n, T_n a la parité de n.

Par dérivation , on obtient encore :

pour tout naturel non nul n, U_n a la parité contraire de n.

8) $T_n(1)$, $T_n(-1)$, $T_n(0)$ (=coefficient constant)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = 1$.
- $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$.
- T_{2n+1} est impair et donc $T_{2n+1}(0) = 0$. Puis $T_{2n}(0) = T_{2n}(\cos \frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

En résumé

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(-1) = (-1)^n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{2n+1}(0) = 0 \text{ et } T_{2n}(0) = (-1)^n \text{ ou encore } T_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}).$$

9) Equation différentielle vérifiée par T_n. Coefficients de T_n

a) Equation différentielle vérifiée par T_n. Pour trouver les coefficients de T_n, on cherche d'abord une équation différentielle linéaire dont T_n est solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$

puis en redérivant

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos\theta),$$

ou encore,

$$\forall x \in [-1,1],\ -xT_n'(x) + (1-x^2)T_n''(x) = -n^2 T_n(x).$$

Ainsi, puisque $[-1,1]$ est infini,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0 \ (E).$$

b) Coefficients de T_n. Soit $n \geq 2$. Puisque T_n est de degré n et a la parité de n, on peut poser

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_k X^{n-2k}.$$

Reportons alors cette écriture de T_n, dans le premier membre de l'équation (E).

$$\begin{aligned}
(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n &= (1-X^2)\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}-1}(n-2k)(n-2k-1)a_kX^{n-2k-2} - X\sum_{0\leq k\leq \frac{n-1}{2}}(n-2k)a_kX^{n-2k-1}\\
&\quad + n^2\sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}} a_kX^{n-2k}\\
&= \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}-1}(n-2k)(n-2k-1)a_kX^{n-2k-2} - \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(n-2k)(n-2k-1)a_kX^{n-2k}\\
&\quad - \sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(n-2k)a_kX^{n-2k} + n^2\sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}a_kX^{n-2k}\\
&= \sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}-1}(n-2(k+1)+2)(n-2(k+1)+1)a_kX^{n-2(k+1)}\\
&\quad + \sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(-(n-2k)(n-2k-1)-(n-2k)+n^2)a_kX^{n-2k}\\
&= \sum_{1\leq k\leq\frac{n}{2}}(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1}X^{n-2k} + \sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(4kn-4k^2)a_kX^{n-2k}\\
&= \sum_{1\leq k\leq\frac{n}{2}}[(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1} + 4k(n-k)a_k]X^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(1-X^2)T_n''-XT_n'+n^2T_n=0 \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N},\ \left(1\leq k\leq \frac{n}{2}\Rightarrow (n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1}+4k(n-k)a_k=0\right).$$

En tenant compte de $a_0=\mathrm{dom}(T_n)=2^{n-1}$, pour $1\leq k\leq \dfrac{n}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned}
a_k&=\frac{-(n-2k+1)(n-2k+2)}{4k(n-k)}\times\frac{-(n-2k+3)(n-2k+4)}{4(k-1)(n-k+1)}\times\ldots\times\frac{-(n-1)n}{4\times 1\times(n-1)}\times a_0\\
&=\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(n-2k+1)\times(n-2k+2)\times(n-2k+3)\times(n-2k+4)\times\ldots\times(n-1)\times n}{k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k)}2^{n-1}\\
&=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n!/(n-2k)!}{k!\times(n-1)!/(n-k-1)!}=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}\\
&=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $k=0$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n=\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}C_{n-k}^kX^{n-2k}.$$

10) Racines de T_n et factorisation de T_n

Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\cos(n\theta)=0\Leftrightarrow n\theta\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}.$$

Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, posons alors $\theta_k=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$ puis $x_k=\cos\theta_k$. On a d'une part

$$0<\frac{\pi}{2n}=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{n-1}=\pi-\frac{\pi}{2n}<\pi,$$

et donc, par stricte décroissance de la fonction $x\mapsto\cos x$ sur $[0,\pi]$,

$$1>x_0>x_1>\ldots>x_{n-1}>-1.$$

En particulier, les n nombres x_k, $0\leq k\leq n-1$, sont deux à deux distincts. Mais d'autre part, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$T_n(\cos\theta_k)=\cos(n\theta_k)=0.$$

et les n nombres x_k, $0\leq k\leq n-1$ sont n racines deux à deux distinctes du polynôme T_n qui est de de degré n. Ce sont donc toutes les racines de T_n, toutes réelles simples et dans $]-1,1[$. En tenant compte de $\mathrm{dom}(T_n)=2^{n-1}$, on a montré que

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, T_n a n racines réelles deux à deux distinctes, toutes dans $]-1,1[$.

2) $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right).$

11) Diverses expressions de T_n et U_n

a) Pour x dans $[-1,1]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $x\in[-1,1]$ puis $\theta=\mathrm{Arccos}\,x$. On a alors $\theta\in[0,\pi]$ et $\cos\theta=x$. L'égalité $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ s'écrit encore :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[-1,1],\ T_n(x)=\cos(n\,\mathrm{Arccos}\,x).$$

De même, l'égalité $\sin\theta U_n(\cos\theta)=\sin(n\theta)$ s'écrit encore :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-1,1[,\ U_n(x)=\frac{\sin(n\,\mathrm{Arccos}\,x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Pour $|x|\geq 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel θ, on a $T_n(\mathrm{ch}\,\theta)=\mathrm{ch}(n\theta)$.

- C'est clair pour $n=0$ et $n=1$.
- Soit $n\geq 0$. Supposons que $T_n(\mathrm{ch}\,\theta)=\mathrm{ch}(n\theta)$ et que $T_{n+1}(\mathrm{ch}\,\theta)=\mathrm{ch}((n+1)\theta)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\mathrm{ch}\,\theta)&=2(\mathrm{ch}\,\theta)T_{n+1}(\mathrm{ch}\,\theta)-T_n(\mathrm{ch}\theta)=2(\mathrm{ch}\,\theta)(\mathrm{ch}(n+1)\theta)-\mathrm{ch}(n\theta)=\mathrm{ch}((n+2)\theta)-\mathrm{ch}(n\theta)+\mathrm{ch}(n\theta)\\
&=\mathrm{ch}((n+2)\theta).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

En dérivant, on obtient $\operatorname{sh}\theta \times T_n'(\operatorname{ch}\theta) = n\operatorname{sh}(n\theta)$ et, en tenant compte de $T_n' = nU_n$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ (\operatorname{sh}\theta)U_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{sh}(n\theta).$$

Soient alors x un réel supérieur ou égal à 1 puis $\theta = \operatorname{argch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{n\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-n\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x+\sqrt{x^2-1})^{-n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x-\sqrt{x^2-1})^{n}\right)\ (\text{car } (x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1).
\end{aligned}$$

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ T_n(x) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x-\sqrt{x^2-1})^{n}\right).$$

Par parité, on peut obtenir les valeurs de T_n pour $x \leq -1$.

En dérivant, on obtient pour $x > 1$:

$$\begin{aligned}
U_n(x) &= \frac{1}{n}T_n'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times n \times \left((1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1} + (1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right).
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right).$$

c) Pour z complexe non nul.
L'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, valable pour tout réel θ, s'écrit encore

$$T_n\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right) = \frac{1}{2}(e^{in\theta}+e^{-in\theta}),$$

ou encore, pour tout nombre complexe z de module 1,

$$T_n\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right) = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right).$$

Par suite, les polynômes $X^nT_n\left(\frac{1}{2}(X^n+\frac{1}{X^n})\right)$ et $\frac{1}{2}(X^{2n}+1)$ coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ T_n\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right) = \frac{1}{2}(z^n+\frac{1}{z^n}).$$

12) Extrema de T_n et U_n sur $[-1,1]$
a) Extrema de T_n
D'après 11)a), pour tout réel θ et tout entier naturel n, $T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$. Ceci montre que pour x réel élément de $]1,+\infty[$ et n entier naturel non nul, on a $T_n(x) > 1$. Par parité de T_n, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (|x| > 1 \Rightarrow |T_n(x)| > 1).$$

Mais puisque pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel non nul n $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (|x| \leq 1 \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1).$$

Soient alors x un réel de $[-1,1]$ et $\theta = \operatorname{Arccos} x$.

$$|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow |\cos(n\theta)| = 1 \Leftrightarrow n\theta \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x \cos\frac{k\pi}{n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!]/\ x \cos\frac{k\pi}{n}.$$

L'équation $|T_n(x)| = 1$ admet, dans $\mathbb{R}$, exactement $n+1$ solutions, toutes dans $[-1,1]$, à savoir les $n+1$ réels $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [\![0,n]\!]$.

On en déduit encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underset{x\in[-1,1]}{\operatorname{Max}} |T_n(x)| = 1.$$

b) Extrema de U_n Tout d'abord on note que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|.$$

Montrons le résultat par récurrence. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- C'est clair pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Si $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$ alors

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta| \leq |\sin(n\theta)| \times |\cos\theta| + |\cos(n\theta)| \times |\sin\theta| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin\theta| \\ &\leq n|\sin\theta| + |\sin\theta| = (n+1)|\sin\theta|,\end{aligned}$$

ce qui démontre par récurrence l'inégalité proposée.

Par suite, pour n entier naturel non nul et θ non dans $\pi\mathbb{Z}$, $|U_n(\cos\theta)| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\right| \leq n$ ou encore (l'inégalité restant valable pour $x = -1$ ou $x = 1$ par continuité) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,1],\ |U_n(x)| \leq n.$$

Soit $n \geq 2$. En reprenant le raisonnement par récurrence ci-dessus, si on a $|\sin(n\theta)| = n|\sin\theta|$ alors toutes les inégalités écrites sont des égalités et on a nécessairement

$$|\sin(n\theta)| = |\sin((n-1)\theta)| \times |\cos\theta| + |\cos((n-1)\theta)| \times |\sin\theta| = |\sin((n-1)\theta)| + |\sin\theta| = n|\sin\theta|.$$

Ceci impose $|\sin((n-1)\theta)| = 0$ car si $|\sin((n-1)\theta)| \neq 0$ alors $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, puis $|\cos\theta| < 1$ et on n'a pas l'égalité. En résumé,

$$\text{si } \theta \notin \pi\mathbb{Z},\ U_n(\cos\theta)| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\right| < n.$$

Maintenant, quand θ tend vers 0 ou vers π dans l'égalité $U_n(\cos\theta)| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\right|$, on obtient $|U_n(1)| = |U_n(-1)| = n$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underset{x\in[-1,1]}{\operatorname{Max}} |U_n(x)| = n.$$

Pour $n \geq 2$, l'équation $|U_n(x)| = n$ admet dans $[-1,1]$ exactement deux solutions à savoir -1 et 1.

13) $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est le polynôme unitaire de degré n réalisant la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur $[-1,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ et P un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Il s'agit de montrer que

$$||tn||_\infty = \frac{1}{2^{n-1}} \leq ||P||_\infty.$$

où $||P||_\infty = \underset{x\in[-1,1]}{\operatorname{Max}} |P(x)|$.

Supposons par l'absurde que $||P||_\infty < \frac{1}{2^{n-1}} = ||t_n||_\infty$.

Considérons les nombres $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n$. Alors $t_n(x_0) = \dfrac{1}{2^{n-1}} > P(x_0)$ puis $t_n(x_1) = -\dfrac{1}{2^{n-1}} < P(x_1)$ puis $t_n(x_2) = \dfrac{1}{2^{n-1}} > P(x_2)\ldots$

Ainsi, le polynôme $t_n - P$ change de signe dans chacun des n intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n-1$ et admet donc au moins n racines deux à deux distinctes. Mais ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $n-1$ car P et t_n sont unitaires de degré n. Donc $t_n - P$ est nul cce qui contredit $\|P\|_\infty < \|t_n\|_\infty$.

Finalement,

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ unitaire de degré } n \geq 1,\ \|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\|.$$

Montrons de plus que t_n est l'unique polynôme unitaire P de degré n vérifiant $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Soit donc P un polynôme unitaire de degré n tel que $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ puis $Q = t_n - P$. Soit L_Q le polynôme d'interpolation de Lagrange de Q en les $n+1$ réels $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n$. On rappelle que

$$L_Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \prod_{j\neq k}(X - x_i) \text{ où } \lambda_k = \frac{Q(x_k)}{\displaystyle\prod_{j\neq k}(xk - x_j)}.$$

Par hypothèse, $\forall x \in [-1, 1]$, $-\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq P(x) \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et comme $t_n(x_k) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$, on en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ (-1)^k Q(x_k) \geq 0.$$

D'autre part, $(-1)^k \displaystyle\prod_{j\neq k}(x_k - x_j) \geq 0$ et donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \geq 0.$$

Maintenant, Q et L_Q sont deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en les $(n+1)$ réels deux à deux distincts x_k, $0 \leq k \leq n$. On a donc $L_Q = Q$ et en particulier, $\deg(L_Q) = \deg(Q) \leq n-1$. Le coefficient de X^n dans L_Q est donc nul. Ceci fournit

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 0.$$

Finalement, les λ_k sont des réels positifs de somme nulle et ils sont donc tous nuls. On en déduit que $Q = 0$ et donc $P = t_n$.

$$\text{pour tout polynôme } P, \text{ unitaire de degré } n \geq 1,\ \|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\|$$
$$\text{avec égalité si et seulement si } P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n.$$

14) Série entière associée à T_n et U_n

Soit $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe tel que $|r| < 1$.

Le développement $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ valable quand $|z| < 1$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2},$$

et par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\forall r \in]-1, 1[,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ , \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta + r^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall r \in]-1,1[,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ ,\sum_{n=0}^{+\infty} r^n T_n(\cos\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \text{ et } \sin\theta \sum_{n=0}^{+\infty} r^n U_n(\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

ou enfin

$$\forall t \in]-1,1[,\ \forall x \in [-1,1],\ ,\sum_{n=0}^{+\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n(x) = \frac{t}{1 - 2t\cos\theta + t^2}.$$

(Pour t fixé dans $]-1,1[$ et $x \in \{-1,1\}$, le plus simple est de vérifier directement $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n(x) = \frac{t}{1-2tx+t^2}$).

On obtient aussi

$$1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^n T_n(x) = 2\left(\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} - 1\right) + 1 = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}.$$

On peut procéder autrement. Un calcul formel fournit

$$\begin{aligned}
2xt\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x)t^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}(T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x))t^{n+1} = t^2\sum_{n=1}^{+\infty} T_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} T_{n+1}(x)t^{n+1} \\
&= t^2\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x)t^n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x)t^n - xt,
\end{aligned}$$

puis

$$(t^2 - 2xt + 1)\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x)t^n = xt - t^2 \text{ et donc } (t^2 - 2xt + 1)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x)t^n\right) = 1 - t^2.$$

Réciproquement, à x réel fixé, la fraction rationnelle $\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}$ n'admet donc pas zéro pour pôle et est donc développable en série entière. Si on pose, pour x réel fixé,

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)t^n \text{ pour } t \text{ dans }]-R,R[,$$

l'égalité $(t^2 - 2xt + 1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)t^n = 1 - t^2$ valable pour $t \in]-R,R[$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}(x)t^n = 1 - t^2.$$

Par suite, $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = 2x = 2T_1(x)$, $a_2(x) = 4x^2 - 2 = 2T_2(x)$ et pour $n \geq 3$,

$$a_n(x) - 2xa_{n-1}(x) + a_{n-2}(x) = 0.$$

Par récurrence, il est alors clair que pour tout réel x, $a_0(x) = 1$ et que $\forall n \geq 1,\ a_n(x) = 2T_n(x)$.

Maintenant,

- si $|x| \leq 1$, les pôles de la fraction rationnelle sont de module 1 et on sait que le rayon de convergence de la série est 1.
- Si $x > 1$, les pôles sont $x - \sqrt{x^2-1}$ et $x + \sqrt{x^2-1}$ avec $0 < x - \sqrt{x^2-1} < x + \sqrt{x^2-1}$ et dans ce cas, le rayon, qui est le minimum des modules des pôles, est $R = x - \sqrt{x^2-1}$.

  Si $x < -1$, les pôles sont encore $x - \sqrt{x^2-1}$ et $x + \sqrt{x^2-1}$ avec $x - \sqrt{x^2-1} < x + \sqrt{x^2-1} < 0$ et dans ce cas, le rayon est $R = -x - \sqrt{x^2-1}$.

  En résumé, si $|x| > 1$, la série a un rayon de convergence égal à $|x| - \sqrt{x^2-1}$.

15) Orthogonalité des polynômes T_n

a) Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{array}$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

• Tout d'abord, si P et Q sont deux polynômes, la fonction $t\mapsto\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et donc localement intégrable sur $]-1,1[$. De plus, quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et quand t tend vers -1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ (que 1 ou -1 soient ou non racines de P ou Q) et donc la fonction $t\mapsto\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$. Ainsi, pour tous polynômes P et Q, $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La bilinéarité , la symétrie et la positivité de φ sont claires.

• Soit enfin $P\in\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[,\ P^2(t)=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur }]-1,1[)\\ &\Rightarrow P=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{array} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].$$

b) Orthogonalité des polynômes T_n.

Soient n et m deux entiers naturels. En posant $t=\cos\theta$ pour $\theta\in[0,\pi]$, on a $dt=-\sin\theta d\theta$ ou encore $d\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ car $\sin\theta\geq 0$ pour $\theta\in[0,\pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}T_n|T_m &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\ &=\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\,(-d\theta)\\ &=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta))\,d\theta\end{aligned}$$

Ainsi,

- si $n\neq m$, $\varphi(T_n,T_m)=0$,
- si $n=m\neq 0$, $\varphi(T_n,T_m)=1$
- si $n=m=0$, $\varphi(T_n,T_m)=2$.

Finalement, puisque d'autre part $\forall n\in\mathbb{N},\ \deg(T_n)=n$, on a montré que :

$\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{2}}\right)\cup(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X],|)$ où

$$\forall(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2,\ P|Q=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

16) Intervention des polynômes de Tchebychev dans l'interpolation de Lagrange

C'est l'un des intérêts principaux des polynômes de Tchebychev. Rappelons une expression de l'erreur commise dans l'interpolation de Lagrange.

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, si $x_0<\ldots<x_n$ sont $n+1$ réels deux à deux distincts de $[a,b]$ et si L_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange en $x_0,\ldots,x_n$ alors, pour tout réel x de $[a,b]$, il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que

$$f(x)-L_f(x)=N(x)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\text{ où } N(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k),$$

et en particulier

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - L_f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |N(x)| \sup_{t\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}.$$

On se place sur $[a, b] = [-1, 1]$. Pour minimiser l'erreur commise dans l'interpolation de LAGRANGE, il s'agit de choisir N de sorte que $\sup_{x\in[a,b]} |N(x)|$ soit le plus petit possible. N est un polynôme unitaire de degré $n + 1$ et le 13) montre que $\sup_{x\in[-1,1]} |N(x)|$ est minimum pour $N = \dfrac{1}{2^n} T_{n+1}$.

